Ludovic Métivier et Édouard Oudet
Ludovic.Metivier@ujf-grenoble.fr,Edouard.Oudet@imag.fr

OBJET
Proposition de sujet de stage
master 2R MSIAM

Grenoble, le 1er novembre 2015

Transport optimal sans conservation de masse : résolution par programmation linéaire et méthode de régularisation

Présentation

La définition mathématique d'un problème de transport optimal remonte à l'étude de l'ingénieur des ponts et chaussées Gaspard Monge dans son mémoire sur les déblais et remblais de 1781. Dans ces travaux il s'interroge sur la manière de déplacer du sable nécessaire à la construction d'un pont sur un site approprié avec un minimum d'effort.

Plus formellement, un problème de transport optimal consiste à déterminer, parmi un ensemble de transformations permettant de transporter une distribution donnée sur une distribution cible, celle satisfaisant un critère de minimalité au sens de l'énergie nécessaire à fournir pour la réaliser. Cette énergie conduit à une nouvelle notion de distance entre la distribution donnée et la distribution cible. Le problème de transport optimal est connu dans la littérature sous le nom de problème de Monge-Kantorovich et la distance sous-jacente est appelée distance de Wasserstein [7, 5].

Les travaux mathématiques menés autour de la notion de transport optimal ont de manière surprenante trouvé des applications dans des domaines très variés comme la géométrie différentielle, les équations aux dérivées partielles ou l'analyse d'image [2, 4]. Plus récemment, des travaux se sont attachés à utiliser la distance de Wasserstein au sein d'une méthode d'inversion pour l'imagerie sismique basée sur la minimisation de l'écart entre des données observées et des données modélisées par résolution d'un problème numérique de propagation d'ondes [6]. Les premiers résultats montrent que cette stratégie permet de définir une fonction d'attache aux données plus convexe que la traditionnelle distance L^2.

Cependant, une modification de la distance de Wasserstein est nécessaire dans ce contexte. En effet, le problème de transport optimal tel qu'il est usuellement défini repose sur une hypothèse de conservation stricte de la "masse" de la distribution données vers la distribution cible. Dans une application telle que celle effectuée pour l'imagerie sismique, cette conservation n'est pas observée. Une extension de la distance de Wasserstein pour prendre une compte une telle non-convervation a donc été proposée. Une méthode numérique de résolution de ce problème de transport optimal modifié a été proposée, basée sur la résolution du problème dual et utilisant des opérateur proximaux (méthode SDMM, voir [3] par exemple).

L'objectif du stage proposé est d'étudier une méthode alternative pour la résolution de ce problème de transport modifié. Celle-ci sera basée sur une approche par régularisation du problème primal, comme cela a été proposé récemment pour le problème de transport standard (avec conservation de la masse [1]). Cette approche est intéressante car elle garantit des propriétés de régularité de la solution tout en nécessitant de faibles coûts de calcul par une méthode de projections alternées. Nous souhaitons par ce stage évaluer l'intérêt de cette approche dans le cadre du problème de transport sans conservation d'énergie.

Travail à réaliser

Nous envisageons les étapes de travail suivantes

1. Prise en main de la problématique en s'attachant à la résolution du problème de transport optimal 1D standard par calcul de la solution du problème de programmation linéaire associé.
2. A partir de cet exemple, construction du problème de transport optimal 1D standard régularisé, et résolution du problème par méthode de projections alternées.
3. Etude du problème de transport sans conservation de masse 1D et écriture du problème primal à partir du problème dual. Résolution de ce problème primal par une approche de programmation linéaire.
4. Régularisation du problème primal associé au problème de transport sans conservation de masse 1D. Résolution de ce problème par méthode de projections alternées.

Nous proposons d'effectuer ce travail en langage JULIA pour pouvoir se concentrer sur la formulation et la compréhension mathématique des problèmes et bénéficier d'outils performants pour la résolution des problèmes de programmation linéaires. Suivant l'intérêt et les progrès de l'étudiant, un transfert des méthodes développées vers le langage FORTRAN pour l'application des stratégies sur des images 2D pourra être effectué.

Références

[1] J-D. Benamou, G. Carlier, M. Cuturi, L. Nenna, and G. PeyrÃ©. Iterative Bregman Projections for Regularized Transportation Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2) :A1111–A1138, 2015.

[2] Guillaume Carlier, Gabriel Peyré, Marco Cuturi, Luca Nenna, and Jean-David Benamou. Iterative bregman projections for regularized transportation problems. 2014.

[3] Patrick L Combettes and Jean-Christophe Pesquet. Proximal splitting methods in signal processing. pages 185–212, 2011.

[4] Marco Cuturi, Gabriel Peyré, and Antoine Rolet. A smoothed dual approach for variational wasserstein problems. *arXiv preprint arXiv :1503.02533*, 2015.

[5] L. C. Evans. Partial differential equations and Monge–Kantorovich mass transfer. *Current developments in mathematics*, pages 65–126, 1997.

[6] L. Métivier, R. Brossier, Q. Mérigot, E. Oudet, and J. Virieux. Measuring the misfit between seismograms using an optimal transport distance : Application to full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, page submitted, 2016.

[7] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation.* Number 58. American Mathematical Soc., 2003.