

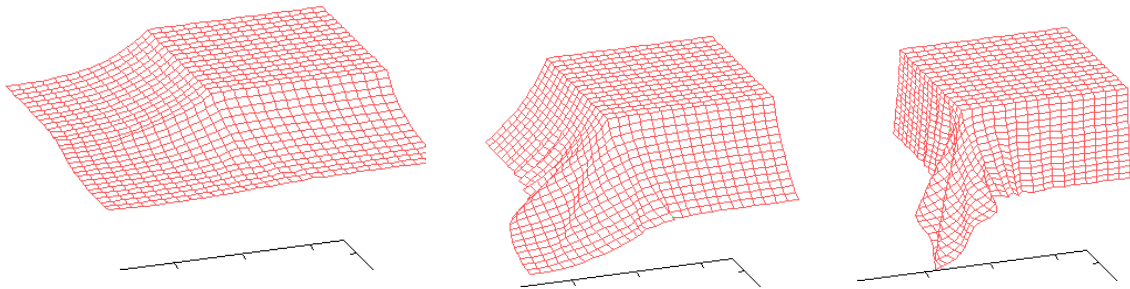
Master project proposal: *Modelling and simulation of fabrics draping using diffusion-redistancing schemes*

Advisors:

Emmanuel Maitre (PR au laboratoire Jean Kuntzmann), emmanuel.maitre@grenoble-inp.fr
Thibaut Métivet (CR INRIA au laboratoire Jean Kuntzmann), thibaut.metivet@inria.fr

[Lab](#) : Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK).

[Teams](#): Equations aux Dérivées Partielles (EDP) / ModELisation de l'Apparence des phénomènes Non-linéaires (ELAN/INRIA)



Context

The [Partial Differential Equations](#) (PDE) team at the Jean Kuntzmann Laboratory (LJK) has been developing for several years an activity around the interaction of elastic bodies with a fluid in which they are immersed. This work is often done in interaction with applied mathematicians and physicists from the Interdisciplinary Laboratory of Physics (LiPhy), who in particular study the behavior of biological membranes in flow (eg: red blood cells).

In the recent thesis of Arnaud Sengers [4], a methodology based on a diffusion of the distance function to the immersed surface [2] to approximate the real motion in an efficient way has been successfully implemented to compute equilibrium shapes of vesicles. These are in fact particularly representative of the objects that we wish to address in our modeling: their membrane is inextensible and their shape is dictated by Willmore energy, which gives them a strongly non-linear mechanical behavior. The usual approach requires calculating the gradient of this energy which naturally leads to non-linear equations of order 4. On the contrary, our approach allows to approach this movement by solving only linear diffusion equations of an initial signed distance function to the interface, for various time steps, and to combine them to obtain an approximation of this nonlinear motion.

In this internship, we plan to investigate the application of such methods to another setting which is related: fabrics modelling. A fabric is hanging under his own on the edge of a table or on top of an obstacle, and we want to model its draping. Usually this modeling is addressed by minimizing some mechanical energy of high order (see pictures above). Here we intend to build a numerical scheme based on diffusion-redistancing principles,.

This approach could be considered as a special case of the “Level Set” method (see for example <http://math.berkeley.edu/~sethian/> or the book [1]) which represents the surface considered as the zero level set of an auxiliary function rather than a material parametric characterization.

The numerical development will be done in FreeFEM++.

The subject would be a nice introduction to the PhD proposal from the same advisors.

References

- [1] S. Osher and R. Fedkiw, Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer.
- [2] S. Esedoglu, S. Ruuth, and R. Tsai (2010). Diffusion generated motion using signed distance functions. *Journal of Computational Physics*, 229(4), 1017-1042.
- [3] A. Sengers, T. Métivet, M. Ismaïl and E. Maitre (2020), Diffusion-redistanciation schemes for 2D and 3D constrained Willmore flow: application to equilibrium shapes of vesicles, to appear <https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-02905870v2> .
- [4] Arnaud Sengers. Schémas semi-implicites et de diffusion-redistanciation pour la dynamique des globules rouges. *Analyse fonctionnelle [math.FA]*. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. ⟨NNT : 2019GREAM032⟩. ⟨tel-02341602⟩

Sujet de thèse : *Modélisation et simulation de surfaces immergées à énergies géométriques d'ordre élevé par schémas de diffusion*

Encadrants :

Emmanuel Maitre (PR au laboratoire Jean Kuntzmann), emmanuel.maitre@grenoble-inp.fr
Thibaut Métivet (CR INRIA au laboratoire Jean Kuntzmann), thibaut.metivet@inria.fr

Lieu : [Laboratoire Jean Kuntzmann \(LJK\)](#),

Equipes : [Equations aux Dérivées Partielles \(EDP\) / ModELisation de l'Apparence des phénomènes Non-linéaires \(ELAN\)](#)

Contexte

L'équipe [Equations aux Dérivées Partielles](#) (EDP) du Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK) développe depuis plusieurs années une activité autour de l'interaction de corps élastiques avec un fluide dans lequel ils sont immergés. Ces travaux se font souvent en interaction avec des mathématiciens appliqués et physiciens du Laboratoire Interdisciplinaire de Physique (LiPhy), qui étudient notamment le comportement de membranes biologiques en écoulement (ex : globules rouges). Des codes de calcul *ad-hoc*, de type différences finies ou particulières ont été développés, ainsi qu'une bibliothèque éléments finis versatile (Feel++, <http://www.feelpp.org/>), développée au sein d'une collaboration entre l'Inria, le LJK et l'Université de Strasbourg (CEMOSIS) et utilisée comme outil de calcul scientifique dans plusieurs thèses co-encadrées sur le sujet (e.g. [10], soutenue en juillet 2019).

Parallèlement, l'équipe Inria ELAN (<https://team.inria.fr/elan/>) de ce même laboratoire s'intéresse à la dynamique d'objets complexes non-linéaires comme les cheveux, les textiles ou encore les matériaux granulaires, avec un positionnement original à l'interface de l'informatique graphique et des mathématiques appliquées. Dans ce contexte, le développement d'algorithmes robustes et efficaces pour la simulation physique s'avère crucial pour le passage à l'échelle et la prise en compte d'effets visuellement riches au sein de grands systèmes.

Dans la récente thèse d'Arnaud Sengers [10], une méthodologie basée sur une diffusion de la fonction distance à la surface immergée [8] pour en approcher le mouvement réel de manière économique a été mise en œuvre avec succès pour calculer les formes d'équilibre de vésicules. Celles-ci sont en effet particulièrement représentatives des objets que nous souhaitons adresser dans notre modélisation : leur membrane est inextensible et leur forme est dictée par l'énergie de Willmore, ce qui leur confère un comportement mécanique fortement non-linéaire. L'approche usuelle nécessite de calculer le gradient de cette énergie ce qui mène naturellement à des équations non-linéaires d'ordre 4. Au contraire, notre approche permet d'approcher ce mouvement en résolvant uniquement des équations de diffusion linéaires à partir d'une distance à l'interface, pour différents pas de temps, et de les combiner pour obtenir une approximation de ce mouvement non linéaire. Combinée à une méthode projective de conservation du volume et de l'aire de ces objets, cette stratégie permet un calcul efficace et stable des forces qui gouvernent la mécanique de telles membranes.

Cette méthode étant validée pour l'obtention des formes d'équilibre, il reste à s'en servir dans le cadre d'une méthode couplage fluide-structure complet, afin de rendre les schémas numériques plus robustes et stables. D'autre part, le caractère général de l'approche suggère de nombreux autres cadres applicatifs, comme par exemple la simulation de textiles en interaction avec l'air qui les environne.

Dans cette approche entièrement eulérienne développée à Grenoble [2,4,5,7], nous utilisons la méthode « Level Set » qui représente la surface considérée comme la ligne de niveau 0 d'une fonction auxiliaire plutôt qu'une caractérisation paramétrique matérielle (c.f. par exemple <http://math.berkeley.edu/~sethian/> ou le livre [1]). Cela permet de réécrire le problème compliqué de couplage entre le fluide et la structure sous la forme d'un fluide complexe, donc complètement en coordonnées eulériennes. L'analyse mathématique des propriétés du modèle ainsi que sa simulation sont ainsi notablement simplifiées.

Cependant la mise en oeuvre de ces problèmes de couplage fluide-structure sous forme eulérienne pose des problèmes de stabilité numérique dans certains contextes, notamment lorsque l'objet élastique immergé est très rigide. Nos recherches s'orientent donc vers la mise au point de schémas numériques permettant de lever au moins en partie ces problèmes de stabilité, dans le cadre de solides immergés [6].

Si les schémas de couplage complètement implicites permettent en théorie d'éviter les problèmes de stabilité, ils impliquent dans ce cas la résolution de systèmes mal-conditionnés et difficiles à analyser algébriquement. Il apparaît donc préférable dans ce contexte de se servir et d'étendre la méthode développée dans la thèse d'Arnaud Sengers pour construire des schémas semi-implicites du couplage d'une ou plusieurs surfaces élastiques avec un fluide environnant, afin de bénéficier des méthodes robustes de pré-conditionnement développées pour les problèmes « mono-physique » tout en assouplissant fortement les restrictions sur le pas de temps liées à la stabilité.

Sujet de thèse

C'est dans ce contexte que le sujet de thèse proposé s'inscrit.

Une première étape sera de construire et de valider un schéma de couplage fluide-structure à partir de la méthode par diffusion décrite ci-dessus, pour calculer l'interaction d'une surface élastique avec un fluide environnant.

Le schéma sera implémenté dans le cadre de la bibliothèque éléments finis FEEL++, et des tests de convergence numérique seront menés.

Cette approche sera ensuite généralisée au cas de plusieurs surfaces, afin de prendre en compte l'interaction de celles-ci en écoulement.

Enfin, on étudiera la généralisation de cette approche à d'autres problèmes présentant une surface pilotée par des énergies géométriques d'ordre élevé en interaction avec un fluide environnant, comme par exemple le cas d'un textile tombant sous l'effet de la gravité dans l'air sur un obstacle rigide.

Bibliographie

- [1] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer.
- [2] G.-H. Cottet, E. Maitre et T. Milcent, Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM-Math. Model. Numer. Anal.*, 42 (3), 471–492, 2008. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00297711/fr/>
- [3] C. Prud'homme, V. Chabannes, V. Doyeux, M. Ismail, A. Samake, et Gonçalo Pena, *Feel++: A Computational Framework for Galerkin Methods and Advanced Numerical Methods*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00662868v3>
- [4] V. Doyeux, Y. Guyot, C. Prud'homme et M. Ismail, Simulation of two-fluid flows using a Finite Element/level set method. Application to bubbles and vesicle dynamics, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 2013, 246, pp.251-259.
- [5] E. Maitre, C. Misbah, Ph. Peyla et A. Raoult. Comparison between advected-field and level-set methods in the study of vesicle dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, 2012, 241 (2012), pp.1146-1157. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00460668>
- [6] G.-H. Cottet et E. Maitre, A semi-implicit level set method for multiphase flows and fluid-structure interaction problems, *Journal of Computational Physics*, Volume 314, 2016, Pages 80-92, ISSN 0021-9991, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.004>.

- [7] T. Milcent, and E. Maitre, (2016). Eulerian model of immersed elastic surfaces with full membrane elasticity. *Communications in Mathematical Sciences*, 14(3), 857-881.
- [8] S. Esedoglu, S. Ruuth, and R. Tsai (2010). Diffusion generated motion using signed distance functions. *Journal of Computational Physics*, 229(4), 1017-1042.
- [9] A. Sengers, T. Métivet, M. Ismaïl and E. Maitre (2020), Diffusion-redistanciation schemes for 2D and 3D constrained Willmore flow: application to equilibrium shapes of vesicles, à paraître <https://hal.univ-grenoble-alpes.fr/hal-02905870v2> .
- [10] Arnaud Sengers. Schémas semi-implicites et de diffusion-redistanciation pour la dynamique des globules rouges. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. ⟨NNT : 2019GREAM032⟩. ⟨tel-02341602⟩